

תורת הקבוצות – תרגיל 4

1. הוכח, כי הקבוצות הבאות הינן בנות מניה:
 - א. קבוצת המספרים הראשוניים.
 - ב. קבוצת השלמים השליליים האי-זוגיים.
 - ג. קבוצת המעגלים במישור עם מרכז בנקודה ששיעוריה מספרים רציונליים ורדיוס רציונלי.
2. תהי A קבוצה בת מניה של נקודות במישור הקרטזי. הוכח שקיים ישר בעל שיפוע 1 שאינו עובר דרך אף אחת מהנקודות ב- A .
3. מטרת שאלה זו היא להוכיח "משפט הוכחה באינדוקציה" עבור קבוצות סופיות.
 - א. הוכח, כי אם עבור תכונה ψ מתקיימים (1) ו-(2) הבאים:
 - (1) $\emptyset$ היא בעלת התכונה ψ .
 - (2) אם לכל קבוצה A , אם כל קבוצה חלקית ממש של A היא בעלת התכונה ψ אז גם A היא בעלת התכונה ψ .
 - ב. תן דוגמה לקבוצה אינסופית S ולתכונה ψ כך שמתקיימים (1) ו-(2) דלעיל, אבל הקבוצה S אינה בעלת התכונה ψ .
 - ג. הערה: משמעות סעיף ב' היא שמשפט האינדוקציה עובד (בצורה כזאת) רק עבור קבוצות סופיות.
 - ד. האם אחת ההנחות (1) ו-(2) מיותרת?
4. נקרא בשם "סדרה חיובית" לסדרה של מספרים חיוביים. נאמר, כי $\{b_n\}$ גדלה מהר יותר מ $\{a_n\}$ אם מתקיים $\lim(a_n/b_n) = 0$. תהי A קבוצה של סדרות חיוביות. הוכח, כי אם לכל סדרה חיובית $\{a_n\}$ קיימת סדרה $\{b_n\} \in A$ כך, ש $\{b_n\}$ גדלה מהר יותר מ $\{a_n\}$ אז A אינה בת מניה.
(רמז: דומה להוכחה שקבוצת המספרים בקטע $[0, 1]$ אינה בת מניה).
5. א. תהי W משפחה של קטעים פתוחים על הישר שאינם נחתכים זה עם זה. הוכח, כי W סופית או בת מניה.
ב. (רשות) תהי $f: R \rightarrow R$ פונקציה מונוטונית. הוכח, כי קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא סופית או בת מניה.
(רמז: כל נקודת אי רציפות של f יוצרת קטע על ציר y בו f אינה מקבלת ערכים).

בהצלחה:

תאריך ההגשה: 17.11.2004